

Quelques remarques sur les actions analytiques des réseaux des groupes de Lie de rang supérieur *

Abdelghani Zeghib

1^{er} février 2008

Résumé. Toutes les actions considérées ici sont *analytiques* (réelles). Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$. Nous montrons, en particulier, la rigidité homotopique (globale) de son action affine usuelle sur le tore T^n ($n \geq 3$), ainsi que celle de son action projective usuelle sur la sphère S^{n-1} (pour $n \geq 4$).

Abstract. All the actions considered here are (real) *analytic*. Let Γ be a subgroup of finite index of $SL(n, \mathbb{Z})$. We prove, in particular, the (global) homotopical rigidity, for both its standard affine action on the torus T^n ($n \geq 3$), and its standard projective action on the sphere S^{n-1} ($n \geq 4$).

Abridged English version

Let ρ_0 denote the standard affine action of Γ , a subgroup of finite index of $SL(n, \mathbb{Z})$, on the torus T^n . In order to prove that it is locally rigid, it is a natural idea to show that every C^1 nearby action ρ is “linearizable”. From a result on persistence of fixed points of [10], and a local linearizability result of [1] (in the analytic case), we get a local linearization of ρ around some fixed point. The main ingredient is then, to introduce a *Siegel neighborhood* of the fixed point, which is a maximal *invariant* open set on which the action is linear. We show that the action on the Siegel neighborhood is C^ω -conjugate to the standard action on a punctured torus, i.e. ρ_0 restricted to the torus with some rational points removed. Holes may exist, in general, as in the case of Katok-Lewis examples which are constructed by a blowing up process. But in the torus case, a homological consideration leads to the existence of (at least) a periodic point lying in a hole. Its Siegel neighborhood must cut that of our initial fixed point (because we are on a torus), contradicting the maximality of these neighborhoods. Therefore the Siegel neighborhood is the whole torus, that is ρ is conjugate to ρ_0 . This idea may be adapted to handle the following situations.

Theorem 1 *Let Γ be a subgroup of finite index of $SL(n, \mathbb{Z})$, and ρ_0 its standard action on T^n ($n \geq 3$).*

*Version légèrement détaillée d'une note soumise aux C.R.A.S.

i) The product of ρ_0 by the trivial action of Γ on any compact (real) analytic manifold N is C^1 locally rigid among C^ω -actions, i.e. it is C^ω -conjugate to every analytic Γ -action on $T^n \times N$, which is C^1 -close to it.

ii) The orbit $\text{Diff}^\omega(T^n) \cdot \rho_0$, i.e. the space of conjugates of ρ_0 in the space $\text{Rep}(\Gamma \rightarrow \text{Diff}^\omega(T^n))$ of analytic actions of Γ on T^n , is closed-open for the C^1 topology, and closed for the C^0 topology.

iii) Any faithful analytic action of Γ on T^n preserving a non-atomic measure, and having a fixed point in the support of this measure, is (up to an automorphism) C^ω -conjugate to ρ_0 .

Theorem 2 Let Γ be a subgroup of finite index of $SL(n+1, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, and ρ_0 its standard projective action on S^n . The orbit $\text{Diff}^\omega(S^n) \cdot \rho_0$ in $\text{Rep}(\Gamma \rightarrow \text{Diff}^\omega(S^n))$ is closed-open for the C^1 topology and closed for the C^0 topology.

Pour montrer que l'action usuelle d'un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ ($n \geq 3$) sur le tore T^n est localement rigide, une idée naturelle consiste à montrer que toute action proche est "linéarisable". Dans cette note, nous montrons comment faire marcher cette approche, et aussi la généraliser à d'autres situations. Les preuves elles mêmes, hormis un résultat de linéarisabilité locale de [1], sont linéaires, i.e. découlent de propriétés de l'action usuelle. Les détails ainsi que des résultats complémentaires paraîtront ultérieurement.

Toutes les actions considérées ici sont **analytiques** (réelles).

1. Linéarisation : du local au global. Soit M une variété analytique réelle et Γ un groupe agissant analytiquement sur M , via un homomorphisme $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}^\omega(M)$. Supposons que cette action admette un point fixe x_0 . Nous avons alors une représentation infinitésimale : $r : \Gamma \rightarrow GL(T_{x_0}M)$.

Supposons que ρ soit analytiquement linéarisable au voisinage de x_0 , c'est-à-dire qu'elle est conjuguée à r , dans un voisinage de x_0 . Plus précisément, cela signifie qu'il existe U , voisinage de 0 dans $T_{x_0}M$, et V voisinage de x_0 dans M , et un difféomorphisme analytique $\phi : U \rightarrow V$, tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous avons l'égalité $\phi r(\gamma) = \rho(\gamma)\phi$, dans un certain voisinage de x_0 (dépendant de γ). Pour pouvoir en profiter dynamiquement, nous aurons besoin d'ouverts U et V invariants respectivement par r et ρ .

Proposition 1

1) Parmi les ouverts étoilés (en 0) de $T_{x_0}M$ dans lesquels ϕ se prolonge analytiquement en un difféomorphisme local sur son image, il existe un seul ouvert maximal, noté \mathcal{E} . Il est en particulier invariant par r , et le prolongement $\bar{\phi}$ de ϕ à \mathcal{E} vérifie la semi-conjugaison globale : $\bar{\phi} r(\gamma)(u) = \rho(\gamma)\bar{\phi}(u)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall u \in \mathcal{E}$.

2) Il existe un ouvert maximal parmi les ouverts connexes, contenant 0, r -invariants, et sur lesquels ϕ se prolonge en un difféomorphisme analytique local

semi-conjuguant r et ρ . (Dans la suite, nous choisirons un tel ouvert qu'on notera \mathcal{M} , et noterons $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow M$, le prolongement de ϕ).

Preuve. En général, il n'y a pas une notion consistante de domaine maximal d'extension d'une application analytique ; sauf en dimension (réelle) 1, auquel cas, on peut parler d'intervalle maximal de prolongement analytique. Dans notre cas ici, nous considérons le prolongement maximal de ϕ le long des demi-rayons issus de $0 \in T_{x_0}M$. Cela détermine un ensemble étoilé (en 0) sur lequel ϕ se prolonge radialement analytiquement. Nous obtenons un ouvert étoilé, en considérant l'intérieur de cet ensemble. Nous nous restreignons ensuite aux points au voisinage desquels le prolongement de ϕ est un difféomorphisme analytique local. C'est notre domaine \mathcal{E} . Tout est naturel, donc, \mathcal{E} est r -invariant, et la semi-conjugaison $\bar{\phi}r(\gamma) = \rho(\gamma)\bar{\phi}$ est satisfaite sur \mathcal{E} . (Plus analytiquement, soit $u \in T_{x_0}M$, si l'application $t \rightarrow \phi(tu)$ se prolonge à $[0, T[$, alors, l'application $t \rightarrow \phi(t(r(\gamma)))$ se prolonge également dans $[0, T[$ par la formule $\phi(t(r(\gamma))) = \rho(\gamma)(\phi(tu))\dots$).

Enfin, comme il y a un ouvert connexe r -invariant satisfaisant la semi-conjugaison ci-dessus, il y en a un (ouvert connexe) maximal (parmi tous les ouverts connexes, non nécessairement étoilés).

◇

2. Exemples. En dépit de son “évidence”, la proposition ci-dessus ne semble pas exister dans la littérature, où l'on s'intéresse particulièrement au cas où la représentation linéaire r est constituée soit de dilatations (et contractions), soit de transformations orthogonales. et de plus, en général, $\Gamma = \mathbb{Z}$. (On parle alors de disque, ou domaine, de Siegel...). Il est vrai que c'est dans ces cas que $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow M$ jouit d'intéressantes propriétés topologiques. Dans le cas général, Φ n'est pas nécessairement un revêtement sur son image. On peut par exemple s'amuser à considérer l'exemple de $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, par un difféomorphisme $f = g \circ A$, où A est un automorphisme hyperbolique de T^2 et $g = (g_1, g_2)$, avec g_1 et g_2 difféomorphismes analytiques de S^1 fixant 0. Pour un choix générique des dérivées $g'_1(0)$ et $g'_2(0)$, la matrice dérivée $D_{(0,0)}f$ n'aura pas de résonances (ce qui entraîne en particulier que $\det(D_{(0,0)}f) \neq \pm 1$), et ainsi d'après le théorème de linéarisation de Sternberg, f est linéarisable au voisinage de $(0, 0)$. Il est exceptionnel que $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow M$ soit un revêtement sur son image. On peut montrer qu'il est impossible que la connexion plate de \mathcal{M} ($\subset \mathbb{R}^2$) descende par Φ (ou en d'autres termes que les identifications de points de \mathcal{M} ayant une même image par Φ , se fassent à l'aide d'applications affines), et ce à cause du fait que $\det(D_{(0,0)}f) \neq \pm 1$.

D'autres exemples s'obtiennent en considérant l'action à gauche d'un réseau Γ d'un groupe de Lie G sur le quotient G/Γ . Cette action fixe le point correspondant à l'élément neutre de G , et y est (localement) linéarisable. Ici, Φ est la restriction de l'application exponentielle $\mathcal{G} \rightarrow G/\Gamma$, à \mathcal{M} , qui est un ouvert connexe $Ad(\Gamma)$ -invariant, et sur lequel l'application exponentielle est un

difféomorphisme local. Même dans le cas de $G = SL(n, \mathbb{R})$, Φ présente assez de pathologies topologiques.

3. Un cas rigide. Les réseaux irréductibles des groupes de Lie semisimples, de centre fini, sans facteur compact et de rang réel ≥ 2 , e.g. $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, sont bien connus par leurs propriétés de rigidité (et super-rigidité). Nous n'en citerons qu'une que nous allons tout de suite exploiter : un résultat de C. Cairns et E. Ghys [1], affirmant, avec les notations ci-dessus (i.e. que Γ agit analytiquement en fixant x_0), que si Γ est un tel réseau, alors son action est linéarisable au voisinage de x_0 . Il est donc intéressant de comprendre Φ dans ce cas. L'exemple précédent de Γ agissant sur G/Γ , montre les limites d'une rigidité espérée pour Φ . La raison, dans ce cas, réside, probablement dans la "relative pauvreté dynamique" de la représentation linéaire r , qui n'est rien d'autre que la représentation Ad de Γ ; par exemple, $Ad(\Gamma)$ agit proprement sur un ouvert (non-vide) de \mathcal{G} .

Dans la suite, nous traiterons le cas où Γ est un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ agissant sur une variété M de dimension ($n \geq 3$).

Nous nous ramènon au cas où r est fidèle (nous utilisons pour cela un théorème de Margulis affirmant que le noyau de r est soit fini, soit d'indice fini). D'après la super-rigidité de Margulis, r est soit la représentation canonique soit sa duale ; nous supposerons pour simplifier les notations que c'est la canonique.

On peut commencer par essayer de comprendre \mathcal{M} . Son complémentaire $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n - \mathcal{M}$ est un fermé invariant par l'action de Γ sur \mathbb{R}^n . De tels ensembles ont été intensivement étudiés dans la littérature ; mais tous les résultats les concernant peuvent se déduire, après manipulation algébrique, du Théorème de M. Ratner, résolvant la conjecture de Raghunathan [9]. Pour voir que ce théorème s'applique bien, on identifie $\mathbb{R}^n - \{0\}$ à l'espace homogène $SL(n, \mathbb{R})/H$, où H est le stabilisateur d'un certain point. Une partie fermée \mathcal{C} de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, Γ -invariante, s'identifie aussi à une partie fermée \mathcal{C}' de $SL(n, \mathbb{R})$, Γ -invariante à gauche et H -invariante à droite, i.e. $\mathcal{C}' = \Gamma \cdot \mathcal{C}' \cdot H$; et par conséquent, elle s'identifie à une partie fermée de $\Gamma \backslash SL(n, \mathbb{R})$, invariante par H (agissant à droite). Le théorème s'applique car Γ est un réseau, et H est engendré par ses éléments unipotents.

Le théorème de Ratner affirme que pour $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, la composante connexe de u dans l'adhérence $\overline{\Gamma \cdot u}$ de son orbite, est de la forme $G \cdot u$, où G est un sous-groupe de Lie connexe, contenant le stabilisateur de u (qui est un conjugué de H) et tel que $\Gamma \cap G$ soit un réseau de G .

On peut en déduire (mais c'est aussi faisable à l'aide d'outils plus élémentaires, dans ce cas précis) que si Γ n'est pas, à automorphisme près, un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, alors, Γ agit minimalement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, et en particulier $\mathcal{C} = \emptyset$. Si Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, alors l'orbite d'un point est, soit dense, soit discrète, auquel cas, ce point est de la forme λu , où u est rationnel (et $\lambda \in \mathbb{R}$). En général, nous avons des parties fermées invariantes propres de la forme $\Gamma \cdot (F \cdot u)$ ($= F \cdot (\Gamma \cdot u)$), où u est rationnel et F est un fermé de $[0, \infty[$ ne contenant pas 0 (la notation $F \cdot u$

désigne l'ensemble $\{tu, t \in F\}$). Tout fermé invariant propre est réunion finie de tels fermés élémentaires.

Théorème 1 *Soit Γ un réseau de $SL(n, \mathbb{R})$, $n > 2$, agissant analytiquement en fixant un point x_0 sur une variété M de dimension n . Alors, \mathcal{M} est unique, on appellera $\Phi(\mathcal{M})$ l'ouvert de Siegel en x_0 .*

Le prolongement maximal $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow M$ vérifie :

- i) Φ est un revêtement sur son image.*
- ii) La connexion affine plate sur \mathcal{M} descend par Φ en une connexion plate ∇ sur $\Phi(\mathcal{M})$.*
- iii) ∇ ne peut pas se prolonger (même localement) en dehors de l'ouvert de Siegel.*

iv) ∇ est (localement) unique, au sens que si Γ préserve une connexion définie sur un ouvert invariant contenu dans l'ouvert de Siegel, alors, c'est la restriction de ∇ .

De plus, il y a deux situations possibles :

Cas dissipatif : *On y distingue deux cas.*

1) Γ n'est pas à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, alors $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, Φ est un difféomorphisme (global) sur son image, et ∇ est complète.

2) Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert Γ -invariant comme décrit ci-dessus, et Φ est un difféomorphisme sur son image $\Phi(\mathcal{M})$.

Cas conservatif : *Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et Φ n'est pas injective. Dans ce cas, Φ transite à travers un difféomorphisme $\Phi^* : (T^n)^* \rightarrow \Phi(\mathcal{M})$, où $(T^n)^*$ est le tore T^n privé d'un nombre fini de points rationnels, et Φ^* respecte les actions et les connexions.*

La possibilité conservative se produit exactement lorsque l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite :

- 1) Γ préserve une mesure finie sans atomes dont le support contient x_0 . Cette mesure est alors la mesure standard sur le tore troué.*
- 2) Il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini tel que l'ensemble des points non-errants de $\rho(\gamma)$ contient un voisinage de x_0 .*

Esquisse de la preuve. D'après la description ci-dessus des ensembles fermés invariants par Γ agissant sur \mathbb{R}^n , nous tirons en particulier que tout ouvert invariant est connexe. En particulier, s'il y a deux ouverts maximaux sur lesquels ϕ se prolonge analytiquement, alors leur intersection est connexe, et par suite, ϕ se prolonge à leur réunion, donc \mathcal{M} est unique.

Les propriétés de Φ découlent de la rigidité de l'ensemble :

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \Phi(x) = \Phi(y)\}$$

C'est une sous-variété analytique de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, localement fermée dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, invariante par l'action diagonale de Γ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour la décrire, nous considérons l'action diagonale de $SL(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{(0, 0)\}$. Cette action

admet une orbite ouverte $\mathcal{O} = \{(u, v)/\mathbb{R}u \neq \mathbb{R}v\}$, et des orbites dégénérées de la forme $\mathcal{O}_\alpha = \{(u, \alpha u), u \in \mathbb{R}^n\}$, α étant un réel. (On suppose $n > 2$).

Évidemment, \mathcal{R} qui est une relation d'équivalence, contient la diagonale \mathcal{O}_1 . L'égalité $\mathcal{R} = \mathcal{O}_1$ signifie que Φ est injective. On se convainc facilement que si $\mathcal{R} \neq \mathcal{O}_1$, alors \mathcal{R} contient des points de l'orbite ouverte \mathcal{O} .

Choisissons un point (e_1, e_2) de \mathcal{O} . Son stabilisateur H (dans $SL(n, \mathbb{R})$) est engendré par ses éléments unipotents ; pour $n = 3$, H est unipotent. Pour étudier l'adhérence de $\Gamma.(e_1, e_2)$, nous aurons besoin de comprendre les sous-groupes connexes contenant H .

Lemme 2 *Notons P le plan $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, et S_P le sous-groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ préservant P ; nous avons une projection $\pi : S_P \rightarrow GL(P) \simeq GL(2, \mathbb{R})$ (H s'identifie à $\pi^{-1}(1)$).*

Soit G un groupe de Lie connexe contenant H et différent de $SL(2, \mathbb{R})$, alors l'une des deux possibilités suivantes se présente :

i) $G \subset S_P$; plus exactement $G = \pi^{-1}(L)$, où L est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

ii) Il existe $e \in P$, et $G = S_e$, ou $G = S_{\mathbb{R}e}$, où $S_{\{\}} désigne le stabilisateur.$

Dans le cas de $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$, il existe G avec $H \subset G \subset S_P$, et $G \cap \Gamma$, un réseau de G , si et seulement si P est un 2-plan rationnel (i.e. engendré par deux vecteurs rationnels). Pour Γ quelconque, l'ensemble des 2-plans P avec un groupe G comme précédemment, vérifiant que $G \cap \Gamma$ est un réseau de G , est dénombrable.

On peut donc se restreindre à l'étude du cas où l'adhérence de l'orbite $\Gamma.(e_1, e_2)$ est déterminée par un groupe G égal à S_e ou $S_{\mathbb{R}e}$. En fait $G = S_e$ car $S_{\mathbb{R}e}$ n'est pas unimodulaire. Donc pour l'action de Γ sur \mathbb{R}^n , l'orbite de e est discrète ; il en découle que Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$.

L'événement, e est colinéaire à e_1 ou à e_2 , correspond à un nombre dénombrable de cas ; nous pouvons donc supposer qu'il n'a pas lieu.

Maintenant S_e agit transitivement sur $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}e$; en particulier tous les points (x, y) d'un voisinage de (e_1, e_2) dans \mathcal{R} , s'écrivent : $(x, y) = (A(e_1), A(e_2))$, avec $A \in S_e$.

Comme e est défini à facteur près, et appartient à $P (= \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2)$, nous pouvons écrire $e_2 = \alpha e_1 + e$, pour un certain α . Donc $y = A(e_2) = \alpha A(e_1) + A(e) = \alpha x + e$ (car $A \in S_e$).

En d'autres termes, un voisinage de (e_1, e_2) dans \mathcal{R} coïncide avec le graphe de l'homothétie-translation $x \rightarrow \alpha x + e$. Notons f cette transformation. Alors, dans un voisinage de e_1 , nous avons $\Phi \circ f = \Phi$. Mais comme f est définie partout, l'égalité se prolonge à tout \mathcal{M} , qui doit être invariant par f .

Il en va de même pour les transformations $h = AfA^{-1}$, qui sont de la forme $x \rightarrow \alpha x + A(e)$, où A parcourt Γ . Sachant que Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, nous en déduisons que les parties translationnelles $A(e)$ de ces transformations forment un réseau de \mathbb{R}^n , et en particulier, si $\alpha \neq 1$, alors il existe un commutateur de ces transformations qui

est une translation non triviale ; et par suite, il existe un réseau de translations g vérifiant $\Phi \circ g = \Phi$. Si $\alpha \neq \pm 1$, il existerait trop de transformations h satisfaisant $\Phi \circ h = \Phi$, contredisant le fait que Φ est un difféomorphisme local. Ceci montre que Φ transite à travers un difféomorphisme Φ^* comme énoncé.

La connexion plate descend à l'ouvert de Siegel $\Phi\mathcal{M}$) car le groupe de Galois du revêtement Φ agit affinement sur \mathcal{M} . Le fait qu'elle ne peut pas se prolonger à un ouvert strictement plus grand que l'ouvert de Siegel, provient du fait que cette connexion est déjà "pratiquement complète". \diamond

Corollaire 2 *Si les ouverts de Siegel de deux points fixes de Γ s'intersectent, alors ils sont identiques.*

4. Dimension $> n$. La discussion précédente se généralise partiellement lorsque Γ agit sur une variété M de dimension $n + p$, telle que la représentation r de Γ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ soit le produit de la représentation canonique dans \mathbb{R}^n par la représentation triviale dans \mathbb{R}^p .

Par exemple, on peut se ramener essentiellement à cette situation, lorsque $p < n$.

Les transformations (partielles) f de \mathbb{R}^{n+p} vérifiant $\Phi \circ f = \Phi$ sont de la forme :

$$f : (u, v) \in \mathbb{R}^n \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow (\alpha(v)u + e(v), g(v))$$

où $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$, $e : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, sont des applications analytiques définies sur l'ouvert (de \mathbb{R}^p) U et g est un difféomorphisme sur son image. (Évidemment, il peut se passer que $\alpha(v) \equiv 1$, et $e(v) \equiv 0$).

Notons que vu la forme de f , la composition, à gauche ou à droite, de f avec des éléments de la forme $r(\gamma)$, est définie dans tout le domaine de définition de f .

Le produit $g = r(\gamma)f^{-1}r(\gamma)^{-1}f$, est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times U$ de la forme $g : (u, v) \rightarrow (u + e(v) - r(\gamma)(e(v)), v)$. En particulier, dès qu'il existe un $e(v) \neq 0$, alors, il y'en aura un réseau, Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et le niveau $\mathbb{R}^n \times \{v\}$ s'envoie par Φ sur un tore troué.

Cette discussion nous fournit en particulier le fait suivant.

Corollaire 3 *Soit Γ un réseau de $SL(n, \mathbb{R})$ agissant analytiquement sur une variété M , en fixant un point x_0 , avec une représentation infinitésimale, produit de la représentation canonique dans \mathbb{R}^n par une représentation triviale. Supposons que l'action préserve une mesure finie dont le support contient un voisinage de x_0 . Alors, Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et sur un ouvert invariant contenant x_0 , l'action est conjuguée à l'action sur $(T^n)^* \times N$, où $(T^n)^*$ est un tore troué sur lequel Γ agit de la façon usuelle, et N est une variété de dimension $p = \dim M - n$, sur lequel Γ agit trivialement.*

On en déduit en particulier :

Corollaire 4 *Soit Γ un réseau de $SL(n, \mathbb{R})$, $n > 2$, agissant fidèlement analytiquement sur une variété M de dimension $< 2n$, en préservant une mesure finie pleine (i.e. son support est égal à M). Si Γ n'est pas à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, alors, l'action n'a aucun point périodique.*

Remarque 3 Dans tous les énoncés précédents, M n'était pas supposée compacte !

5. Première application : actions sur le tore. Nous esquissons dans ce qui suit une preuve de la rigidité locale de l'action usuelle d'un sous-groupe Γ d'indice fini dans $SL(n, \mathbb{Z})$ sur le tore (parmi les actions C^ω). En fait, pour simplifier les notations, nous supposons que $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$. Nous supposons aussi que $n \geq 6$, et ce pour pouvoir “scinder” Γ en réseaux de rang supérieur. Le cas général, c'est-à-dire $n \geq 3$, demande un peu plus d'analyse.

Soit ρ une action C^1 proche de l'action standard ρ_0 . D'après un théorème de Stowe [10], ρ admet un point fixe x_0 (proche de 0). On peut se convaincre facilement que l'ouvert de Siegel en x_0 est un tore troué, c'est-à-dire qu'on ne peut pas être dans le cas dissipatif du Théorème 1. L'action ρ sera conjuguée à ρ_0 si l'on démontre que l'ouvert de Siegel est un vrai tore, i.e. qu'il est non-troué.

Pour montrer cela, il suffit de montrer que Γ , ou même un sous-groupe d'indice fini, possède un point fixe, disons x_1 , résidant dans un trou (i.e. le complémentaire de l'ouvert de Siegel de x_0). En effet, alors, puisqu'on est sur un tore, les deux domaines de Siegel doivent s'intersecter, contredisant le Corollaire 2.

On cherchera un point fixe dans un trou, comme intersection de deux sous-variétés, lieux de points fixes de deux sous-groupes engendrant Γ , dont on sait que le nombre d'intersection total est supérieur à leur nombre d'intersection dans l'ouvert de Siegel en x_0 .

Plus précisément, soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n , et notons E_1 (resp. E_2) les plans engendrés par e_1, e_2, e_3 (resp. e_4, \dots, e_n). Ils sont (ponctuellement) fixés par $\Gamma_1 = SL(n-3, \mathbb{Z})$ et $\Gamma_2 = SL(3, \mathbb{Z})$ (plongés naturellement dans $SL(n, \mathbb{Z})$).

Notons F_1 (resp. F_2) l'ensemble (analytique) des points fixes de $\rho(\Gamma_1)$ (resp. $\rho(\Gamma_2)$). D'après un théorème de Stowe, lorsque ρ est C^1 proche de ρ_0 , ces ensembles sont des sous variétés (proches des celles qui correspondent à ρ_0). (On utilise pour appliquer le théorème de Stowe, le théorème d'annulation cohomologique de Margulis).

Évidemment F_1 et F_2 sont des prolongements dans les trous, de $\Phi(E_1)$ et $\Phi(E_2)$ respectivement.

Considérons un élément $\gamma \in SL(n, \mathbb{Z})$ tel que $E'_2 = r(\gamma)(E_2)$ intersecte transversalement $E_1 + \mathbb{Z}^n$ en un point de $\mathbb{R}^n - \mathcal{M}$ (cela existe car $\mathbb{R}^n - \mathcal{M}$ est constitué de points rationnels).

Le nombre d'intersection de $F'_2 = \rho(\gamma)(F_2)$ avec F_1 est le même que dans le cas de l'action standard. Il est égal au cardinal de $E'_2 \cap (E_1 + \mathbb{Z}^n) \bmod \mathbb{Z}^n$. Mais le nombre d'intersection de F'_2 avec F_1 à l'intérieur de l'ouvert de Siegel

vaut le nombre d'intersection de $\Phi(E'_2)$ avec $\Phi(E_1)$, qui est égal au cardinal de $(E'_2 \cap (E_1 + \mathbb{Z}^n) - \mathcal{M}) \bmod \mathbb{Z}^n$. Le choix de γ assure que ces deux nombres d'intersection sont différents, et par suite E'_2 et E_1 s'intersectent en dehors de l'ouvert de Siegel.

On remarque maintenant que E_1 et E_2 sont en fait fixés (ponctuellement) par des groupes plus grands que Γ_2 et Γ_1 respectivement ; et qui sont des produits semi-directs évidents $\Gamma_2 \ltimes N_2$ et $\Gamma_1 \ltimes N_1$, où N_1 et N_2 sont unipotents. Il en résulte que le groupe engendré par $r(\gamma)(\Gamma_2 \ltimes N_2)r(\gamma)^{-1}$ et $\Gamma_1 \ltimes N_1$ fixe un point dans un trou. Mais, à cause de la transversalité entre E'_2 et E_1 , ce groupe est d'indice fini dans $SL(n, \mathbb{Z})$. \diamond

Les premiers résultats de rigidité locale sont dus à Hurder [2] et Katok-Lewis [4] (dans le cas lisse). La rigidité locale de l'action des sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ sur T^n est parue dans [5]. L'un des travaux les plus récents sur la question est [8], où l'on démontre la rigidité locale des "actions algébriques" faiblement hyperboliques. Ici, à l'aide des développements du §4, on peut adapter l'approche ci-dessus pour traiter la rigidité locale dans une situation qui n'est pas faiblement hyperbolique, où Γ agit diagonalement sur un produit $T^n \times N$, où N est une variété compacte quelconque sur laquelle Γ agit trivialement (Voir [7] pour des résultats proches).

Théorème 5 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, $n > 2$. Considérons ρ_0 l'action produit de l'action usuelle de Γ sur T^n , par l'action triviale sur une variété compacte N . Alors ρ_0 est localement rigide sous perturbation C^1 , parmi les actions analytiques ; plus précisément, toute action analytique C^1 proche de ρ_0 , est analytiquement conjuguée à ρ_0 .*

Pour les actions sur T^n , nous avons le résultat de non-dégénérescence suivant.

Théorème 6 *Soit Γ un sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et (ρ_i) une suite d'actions analytiques de Γ conjuguées à son action usuelle sur T^n . Supposons que cette suite converge au sens de la topologie C^0 vers une action analytique ρ . Alors ρ est analytiquement conjuguée à l'action usuelle.*

Ce type de résultat est étranger à la théorie hyperbolique, notamment dans le cas classique des difféomorphismes d'Anosov, puisqu'il existe des applications dites DA, dérivées d'Anosov.

Le théorème suivant unifie les deux résultats précédents dans le cas de T^n , et rend vraisemblable une rigidité globale des actions analytiques dans ce cas (sans hypothèse d'hyperbolicité ou de préservation de volume...).

Corollaire 7 *Soit Γ un sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et $Rep(\Gamma, Diff^\omega(T^n))$ l'espace de ses actions analytiques sur T^n . L'orbite $Diff^\omega(T^n) \cdot \rho_0$, i.e. l'espace des actions conjuguées à l'action standard ρ_0 , est ouvert dans $Rep(\Gamma, Diff^\omega(T^n))$ au sens de la topologie C^1 , et fermée au sens de la topologie C^0 .*

En particulier, toute action homotope à l'action usuelle, au sens de la topologie C^1 , à travers des actions C^ω , lui est C^ω conjuguée.

Nous ne savons pas démontrer que l'orbite $Diff^\omega(T^n) \cdot \rho_0$ est ouverte dans $Rep(\Gamma, Diff^\omega(T^n))$, au sens de la topologie C^0 , pour la simple raison que nous

ne disposons pas d'un résultat de persistance de point fixe de Γ sous perturbation C^0 . (Une telle persistance paraît vraisemblable dans ce contexte précis).

Enfin, nous avons ce résultat global, qui réduit (essentiellement) la rigidité globale à l'existence de points périodiques.

Théorème 8 *Toute action fidèle analytique d'un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ sur T^n ayant un point fixe et préservant une mesure finie non-atomique dont le support contient le point fixe est analytiquement conjuguée à l'action usuelle.*

6. Deuxième application : actions sur la sphère. Le groupe de Lie $SL(n+1, \mathbb{R})$ agit projectivement sur la sphère S^n , ce qui donne par restriction une action de ses réseaux. Une super-rigidité dans ce contexte consiste à se demander si réciproquement, une action d'un réseau Γ de $SL(n+1, \mathbb{R})$ se prolonge en une action de $SL(n+1, \mathbb{R})$ (qui sera par suite nécessairement l'action projective usuelle, à automorphisme près). La rigidité locale est une version locale de cette question. Elle a été démontrée, mais seulement pour les réseaux co-compacts, d'abord par Kanai [3] avec une restriction (technique) sur la dimension, et ensuite dans le cas général par Katok-Spatzier [6] (qui démontrent en fait la rigidité locale des réseaux co-compacts de rang ≥ 2 agissant sur des bords).

Ici, nous considérons des réseaux (non co-compacts) de $SL(n+1, \mathbb{R})$ qui sont des sous-groupes d'indice fini dans $SL(n+1, \mathbb{Z})$ (à automorphisme près). Leur avantage ici, est qu'il contiennent des réseaux de $SL(n, \mathbb{R})$, qui admettent donc des points fixes, auxquels nous pouvons ainsi appliquer Théorème 1. Nous avons le résultat (global) suivant.

Théorème 9 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n+1, \mathbb{Z})$, agissant fidèlement analytiquement sur une variété compacte M de dimension $n \geq 3$, tel que $\Gamma \cap SL(n, \mathbb{Z})$ admet un point fixe. Alors, à automorphisme près, c'est l'action usuelle de Γ sur la sphère S^n ou sur l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$.*

Esquisse de la preuve. Nous supposons pour simplifier les notations que $\Gamma = SL(n+1, \mathbb{Z})$. Ses éléments de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $A \in SL(n, \mathbb{R})$ forment un sous-groupe isomorphe à $SL(n, \mathbb{Z})$ que nous notons Γ_0 . Les sous-groupes abéliens unipotents constitués des éléments de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ sont notés N^+ et N^- respectivement. Ils sont isomorphes à \mathbb{Z}^n , et donnent lieu à deux produits semi-directs $\Gamma_0 \ltimes N^+$ et $\Gamma_0 \ltimes N^-$ isomorphes au produit semi-direct $SL(n, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$ (où $SL(n, \mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{Z}^n vu comme le réseau canonique de \mathbb{R}^n , dans un cas via la représentation canonique de $SL(n, \mathbb{R})$, et dans l'autre cas, via sa représentation duale).

Par hypothèse, Γ_0 fixe un point, disons x_0 , nous supposons que sa représentation infinitésimale est la canonique. Maintenant, l'idée est de revêtir M d'une structure projective Γ -invariante, en suivant la recette déterminée par la structure projective usuelle (sur S^n ou $\mathbb{R}P^n$).

Nous montrons d'abord, que tout comme dans le cas standard, au moins à indice fini près, N^+ fixe x_0 . L'idée est que le centralisateur dans Γ_0 , d'un élément γ de N^+ , est suffisamment grand, et ne peut avoir que des points fixes isolés, qui sont, dans leur ensemble, invariants par γ .

Ainsi, $\Gamma_0 \ltimes N^+$ admet x_0 comme point fixe, et l'action de Γ_0 y est (localement) linéarisable. Nous montrons alors que $\Gamma_0 \ltimes N^+$ préserve (localement) une structure projective plate au voisinage de x_0 (celle déterminée par la connexion affine locale préservée par Γ_0).

Soit $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$ l'ouvert de Siegel de x_0 relatif à l'action de Γ_0 . Il correspond nécessairement au cas dissipatif du Théorème 1 (le cas conservatif est exclu, car il y a un groupe plus grand, Γ , qui agit). Il s'identifie donc à un ouvert de \mathbb{R}^n invariant par l'action de $SL(n, \mathbb{Z})$ ($= \Gamma_0$).

Le bord de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$ dans M peut être très compliqué.

La connexion projective s'étend, en particulier, à $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$, mais aussi individuellement aux images $\rho(\gamma)(\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0))$, $\gamma \in N^+$ (car N^+ préserve la connexion projective).

Nous montrons que la connexion projective plate s'étend au voisinage de la frontière de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$. En développant la situation (équivariante) dans le substratum de la géométrie projective plate (i.e. S^n ou $\mathbb{R}P^n$), nous identifions le bord, et par suite l'adhérence de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$. Il s'agit d'une hémisphère (projective) dont le bord est soit S^{n-1} soit $\mathbb{R}P^{n-1}$. Dans ce dernier cas, l'adhérence de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$ couvre toute la variété M , qui sera donc $\mathbb{R}P^n$. Dans le cas où le bord est S^{n-1} , nous nous aidons de N^- pour trouver une deuxième hémisphère complémentaire à $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$, ce qui permet d'identifier M à S^n .

◇

Il est probable que ce théorème soit vrai sans l'hypothèse de compacité de M (l'énoncé serait alors qu'une telle action n'existe pas dans ce cas).

On en déduit en particulier la rigidité locale (parmi les actions analytiques), mais aussi une propriété de non-dégénérescence, comme dans le cas du tore ci-dessus.

Corollaire 10 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n+1, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$. Alors l'orbite par $Diff^\omega(S^n)$ de son action standard sur S^n est ouverte-fermée dans $Rep(\Gamma, Diff^\omega(S^n))$ muni de la topologie C^1 et elle est fermée au sens de la topologie C^0 .*

Références

- [1] C. Cairns, É. Ghys, The local linearization problem for smooth $SL(n)$ -actions. Enseign. Math. (2) 43 (1997) 133–171.
- [2] S. Hurder, Rigidity for Anosov actions of higher rank lattices. Ann. of Math. (2) 135 (1992) 361–410.
- [3] M. Kanai, A new approach to the rigidity of discrete group actions. Geom. Funct. Anal. 6 (1996) 943–1056.

- [4] A. Katok, J. Lewis, Local rigidity for certain groups of toral automorphisms. *Israel J. Math.* 75 (1991) 203–241.
- [5] A. Katok, J. Lewis, R. Zimmer, Cocycle superrigidity and rigidity for lattice actions on tori. *Topology* 35 (1996) 27–38.
- [6] A. Katok, R. Spatzier, Nonstationary normal forms and rigidity of group actions. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 2 (1996) 124–133
- [7] V. Nitica, A. Török, Cohomology of dynamical systems and rigidity of partially hyperbolic actions of higher-rank lattices. *Duke Math. J.* 79 (1995) 751–810.
- [8] G. Margulis, N. Qian, Rigidity of weakly hyperbolic actions of higher real rank semisimple Lie groups and their lattices. Preprint.
- [9] M. Ratner, Raghunathan’s topological conjecture and distributions of unipotent flows. *Duke Math. J.* 63 (1991) 235–280.
- [10] D. Stowe, Stable orbits of differentiable group actions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983) 665–684.

CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon
 46, allée d’Italie, 69364 Lyon cedex 07, FRANCE
 Zeghib@umpa.ens-lyon.fr
[http ://umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/](http://umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/)